Γενικευμένη Simplex

ΕΛΛΑΔΑ 2008

Ανάπτυξη παντού. Ανάπτυξη για όλους.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ

ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ

Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Εκπαίδευσης και Αρχικής Επαγγελματικής Κατάρτισης

Πρόβλημα cutting stock

- Λογικά μεγέθη (20 περιορισμοί, 24000 μεταβλητές)

Πρόβλημα cutting stock

- Λογικά μεγέθη (20 περιορισμοί, 24000 μεταβλητές)
- Μεγάλα μεγέθη (30 περιορισμοί, 190000 μεταβλητές)

Πρόβλημα cutting stock

- Λογικά μεγέθη (20 περιορισμοί, 24000 μεταβλητές)
- Μεγάλα μεγέθη (30 περιορισμοί, 190000 μεταβλητές)
- Επίλυση μέσω προβλήματος Σακιδίου

- p ορθογώνιες πλάκες με μήκος $(L_1, \ldots, L_p)$ και ένα κόστη $(c_1, \ldots, c_p)$

Πρόβλημα cutting stock

- p ορθογώνιες πλάκες με μήκος $(L_1, \ldots, L_p)$ και ένα κόστη $(c_1, \ldots, c_p)$
- m διαφορετικά είδη παραγγελιών $(l_1, \ldots, l_m)$ στις ποσότητες στις ποσότητες $(d_1, \ldots, d_m)$

Πρόβλημα cutting stock

- p ορθογώνιες πλάκες με μήκος $(L_1, \ldots, L_p)$ και ένα κόστη $(c_1, \ldots, c_p)$
- m διαφορετικά είδη παραγγελιών $(l_1, \ldots, l_m)$ στις ποσότητες στις ποσότητες $(d_1, \ldots, d_m)$
- Ικανοποίηση παραγγελιών με το ελάχιστο κόστος

Πρόβλημα cutting stock

- p ορθογώνιες πλάκες με μήκος $(L_1, \ldots, L_p)$ και ένα κόστη $(c_1, \ldots, c_p)$
- m διαφορετικά είδη παραγγελιών $(l_1, \ldots, l_m)$ στις ποσότητες στις ποσότητες $(d_1, \ldots, d_m)$
- Ικανοποίηση παραγγελιών με το ελάχιστο κόστος
- Ύπαρξη άχρηστων κομματιών

- Θεωρούμε κάθε δυνατό μοντέλο ανάθεσης παραγγελιών J_k για την πλάκα k

Cutting Stock Μοντελοποίηση

- Θεωρούμε κάθε δυνατό μοντέλο ανάθεσης παραγγελιών J_k για την πλάκα k
- Κάθε μοντέλο αποτελείται από έναν αριθμό από κάθε παραγγελία που θα αποκοπεί από την πλάκα k

Cutting Stock Μοντελοποίηση

- Θεωρούμε κάθε δυνατό μοντέλο ανάθεσης παραγγελιών J_k για την πλάκα k
- Κάθε μοντέλο αποτελείται από έναν αριθμό από κάθε παραγγελία που θα αποκοπεί από την πλάκα k
- $\forall j \in J_k \; 0 \leq L_k \sum_{i=1}^{m} a_{ij} l_i \leq M$, a_{ij} αντιστοιχεί στον αριθμό της παραγγελιών i στο μοντέλο j

Cutting Stock Μοντελοποίηση

- Θεωρούμε κάθε δυνατό μοντέλο ανάθεσης παραγγελιών J_k για την πλάκα k
- Κάθε μοντέλο αποτελείται από έναν αριθμό από κάθε παραγγελία που θα αποκοπεί από την πλάκα k
- $\forall j \in J_k \; 0 \leq L_k \sum_{i=1}^{m} a_{ij} l_i \leq M$, a_{ij} αντιστοιχεί στον αριθμό της παραγγελιών i στο μοντέλο j
- $a_{ij} \in \mathbb{N}$

Cutting Stock Μοντελοποίηση

$$\min w = \sum_{k=1}^{p} c_k \sum_{j \in J_k} x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k=1}^{p} \sum_{j \in J_k} a_{ij} x_j = d_i, \; i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \in \mathbb{N}, \forall j \in \bigcup_{k=1}^{p} J_k$$

Cutting Stock Μοντελοποίηση

$$\min w = \sum_{k=1}^{p} c_k \sum_{j \in J_k} x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k=1}^{p} \sum_{j \in J_k} a_{ij} x_j = d_i, \, i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \in \mathbb{N}, \forall j \in \bigcup_{k=1}^{p} J_k$$

Σύμφωνα με τη μορφή πινάκων σε κάθε μοντέλο αντιστοιχίζεται και μια κολόνα του A. Συνολικός αριθμός κολονών : $n = \sum_{k=1}^{p} |J_k|$

$$\min w = \sum_{k=1}^{p} c_k \sum_{j \in J_k} x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k=1}^{p} \sum_{j \in J_k} a_{ij} x_j = d_i, \; i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \in \mathbb{N}, \forall j \in \bigcup_{k=1}^{p} J_k$$

Σύμφωνα με τη μορφή πινάκων σε κάθε μοντέλο αντιστοιχίζεται και μια κολόνα του A. Συνολικός αριθμός κολονών : $n = \sum_{k=1}^{p} |J_k|$

Τεράστιες διαστάσεις!

Cutting Stock Παράδειγμα

- Δύο πλάκες με μήκη : $L_1 = 7.4$ και $L_2 = 7$

- Δύο πλάκες με μήκη : $L_1 = 7.4$ και $L_2 = 7$
- Κόστη πλακών $c_1 = 7.3$ και $c_2 = 7$

Cutting Stock Παράδειγμα

- Δύο πλάκες με μήκη : $L_1 = 7.4$ και $L_2 = 7$
- Κόστη πλακών $c_1 = 7.3$ και $c_2 = 7$
- Τρία είδη παραγγελιών με μήκη : $l_1 = 2.9$, $l_2 = 2.1$ και $l_3 = 1.5$

Cutting Stock Παράδειγμα

- Δύο πλάκες με μήκη : $L_1 = 7.4$ και $L_2 = 7$
- Κόστη πλακών $c_1 = 7.3$ και $c_2 = 7$
- Τρία είδη παραγγελιών με μήκη : $l_1 = 2.9$, $l_2 = 2.1$ και $l_3 = 1.5$
- Απαιτήσεις σε παραγγελίες : $d_1 = 100$, $d_2 = 100$ και $d_3 = 100$

Cutting Stock Παράδειγμα

- Δύο πλάκες με μήκη : $L_1 = 7.4$ και $L_2 = 7$
- Κόστη πλακών $c_1 = 7.3$ και $c_2 = 7$
- Τρία είδη παραγγελιών με μήκη : $l_1 = 2.9$, $l_2 = 2.1$ και $l_3 = 1.5$
- Απαιτήσεις σε παραγγελίες : $d_1 = 100$, $d_2 = 100$ και $d_3 = 100$
- Εύρεση πλήθους L_1 και L_2 που πρέπει να χρησιμοποιηθούν για να ικανοποιηθούν οι παραγγελίες και να ελαχιστοποιείται το κόστος

Cutting Stock Παράδειγμα

- Ένας αριθμός μοντέλων μπορεί να θεωρηθεί "΄αχρηστοσ" αν δεν χρησιμοποιεί εκμεταλλεύσιμο κομμάτι τις εκάστοτε πλάκας

Cutting Stock Παράδειγμα

- Ένας αριθμός μοντέλων μπορεί να θεωρηθεί "αχρηστοσ" αν δεν χρησιμοποιεί εκμεταλλεύσιμο κομμάτι τις εκάστοτε πλάκας
- π.χ. το μοντέλο $(0, 0, 0)$ δεν χρησιμοποιεί κανένα κομμάτι της πλάκας

Cutting Stock Παράδειγμα

- Ένας αριθμός μοντέλων μπορεί να θεωρηθεί "αχρηστοσ" αν δεν χρησιμοποιεί εκμεταλλεύσιμο κομμάτι τις εκάστοτε πλάκας
- π.χ. το μοντέλο $(0, 0, 0)$ δεν χρησιμοποιεί κανένα κομμάτι της πλάκας
- Αποφεύγουμε αυτό το είδος των μοντέλων βάζοντας ένα όριο στο αχρησιμοποίητο κομμάτι της πλάκας. Ένα προφανές πάνω φράγμα είναι το μήκος της μικρότερου είδους παραγγελίας

Cutting Stock Παράδειγμα

- Ένας αριθμός μοντέλων μπορεί να θεωρηθεί "άχρηστος" αν δεν χρησιμοποιεί εκμεταλλεύσιμο κομμάτι τις εκάστοτε πλάκας
- π.χ. το μοντέλο $(0, 0, 0)$ δεν χρησιμοποιεί κανένα κομμάτι της πλάκας
- Αποφεύγουμε αυτό το είδος των μοντέλων βάζοντας ένα όριο στο αχρησιμοποίητο κομμάτι της πλάκας. Ένα προφανές πάνω φράγμα είναι το μήκος της μικρότερου είδους παραγγελίας
- π.χ για το μοντέλο (a_1, a_2, a_3) ισχύει:
  $2.9a_1 + 2.1a_2 + 1.5a_3 + b = L_i, i = 1, 2, b < 1.5$

Cutting Stock Παράδειγμα

Αν εφαρμόσουμε αυτή την τεχνική για την επιλογή μοντέλων στο προηγούμενο παράδειγμα καταλήγουμε στα εξής εφικτά μοντέλα :

Αν εφαρμόσουμε αυτή την τεχνική για την επιλογή μοντέλων στο προηγούμενο παράδειγμα καταλήγουμε στα εξής εφικτά μοντέλα :

$$\begin{array}{lllll} (2,0,1): & 2l_1 & +0l_2 & +l_3 & =7.3 \\ (1,2,0): & l_1 & +2l_2 & +0l_3 & =7.1 \\ (1,0,3): & l_1 & +0l_2 & +3l_3 & =7.4 \\ (0,2,2): & 0l_1 & +2l_2 & +2l_3 & =7.2 \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} (1,1,1): & l_1 & +l_2 & +l_3 & =6.5 \\ (0,3,0): & 0l_1 & +3l_2 & +0l_3 & =6.3 \\ (0,1,3): & 0l_1 & +1l_2 & +3l_3 & =6.6 \\ (0,0,4): & 0l_1 & +0l_2 & +4l_3 & =6.5 \end{array}$$

Cutting Stock Παράδειγμα

Παραγγελίες	Μοντέλα								Ποσότητες
2.9	2	1	1	1	0	0	0	0	100
2.1	0	2	1	0	3	2	1	0	100
1.5	1	0	1	3	0	3	2	4	100
Κόστη	7.3	7.3	7	7.3	7	7.3	7	7	
Μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	

Cutting Stock Παράδειγμα

Παραγγελίες	Μοντέλα								Ποσότητες
2.9	2	1	1	1	0	0	0	0	100
2.1	0	2	1	0	3	2	1	0	100
1.5	1	0	1	3	0	3	2	4	100
Κόστη	7.3	7.3	7	7.3	7	7.3	7	7	
Μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	

Μια λύση : $x = (5, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$ 11 Παραγγελίες l_1, 3 παραγγελίες l_2 και 8 παραγγελίες l_3

Κόστος : 50.8

Το γραμμικό πρόβλημα σύμφωνα με τα παραπάνω μοντέλα είναι :

$$
\begin{array}{llllllllll}
\min z = & 7.3x_1 & +7.3x_2 & +7x_3 & +7.3x_4 & +7x_5 & +7.3x_6 & +7x_7 & +7x_8 & \\
s.t. & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & & & & \geq 100 \\
 & & 2x_2 & +x_3 & & +3x_5 & +2x_6 & +x_7 & & \geq 100 \\
 & x_1 & & +x_3 & +3x_4 & & +2x_6 & +3x_7 & +4x_8 & \geq 100 \\
 & x_i & \in \mathbb{N} & & & & & & &
\end{array}
$$

- Ο πίνακας A έχει τεράστιες διαστάσεις

- Ο πίνακας A έχει τεράστιες διαστάσεις
- Η βάση B όμως είναι μικρή

- Ο πίνακας A έχει τεράστιες διαστάσεις
- Η βάση B όμως είναι μικρή
- Δεν χρειαζόμαστε να γνωρίζουμε όλον τον πίνακα A από την αρχή

Γενικευμένη Simplex

- Ο πίνακας A έχει τεράστιες διαστάσεις
- Η βάση B όμως είναι μικρή
- Δεν χρειαζόμαστε να γνωρίζουμε όλον τον πίνακα A από την αρχή
- Για την εισαγωγή μιας μεταβλητής στη βάση πρέπει να βρούμε μια κολόνα s εκτός βάσης $c_s < uA_s$ όπου $Bu = c_s$

- Ο πίνακας A έχει τεράστιες διαστάσεις
- Η βάση B όμως είναι μικρή
- Δεν χρειαζόμαστε να γνωρίζουμε όλον τον πίνακα A από την αρχή
- Για την εισαγωγή μιας μεταβλητής στη βάση πρέπει να βρούμε μια κολόνα s εκτός βάσης $c_s < uA_s$ όπου $Bu = c_s$
- Κατασκευάζουμε κάθε φορά την κολόνα που θα εισάγουμε στη βάση

Για την εύρεση της κολόνας προς εισαγωγή θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα σακιδίου :

Για την εύρεση της κολόνας προς εισαγωγή θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα σακιδίου : $k \in \{1 \ldots p\}$

B($\mathbf{P^k}$)

$$\begin{array}{lccccccccc} \max uz^k = & u_1 z_1 & + & u_2 z_2 & + & \ldots & + & u_m z_m & & \\ s.t. & l_1 z_1 & + & l_2 z_2 & + & \ldots & + & l_m z_m & < & L_k \\ & z_1 & , & z_2 & , & \ldots & , & z_m & \in & \mathbb{N} \end{array}$$

Για την εύρεση της κολόνας προς εισαγωγή θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα σακιδίου : $k \in \{1 \dots p\}$

$\mathbf{B(P^k)}$

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
\max uz^k = & u_1 z_1 & + & u_2 z_2 & + & \dots & + & u_m z_m & & \\
s.t. & l_1 z_1 & + & l_2 z_2 & + & \dots & + & l_m z_m & < & L_k \\
 & z_1 & , & z_2 & , & \dots & , & z_m & \in & \mathbb{N}
\end{array}
$$

Η βέλτιστη λύση του παραπάνω είναι μια υποψήφια κολόνα για εισαγωγή στη βάση. Σε περίπτωση που δεν βελτιώνει την αντικειμενική συνάρτηση πρέπει να ελέγξουμε τις υπόλοιπες πλακες

Γενικευμένη Simplex

Για να γενικεύσουμε την Simplex αλλάζουμε λοιπόν το βήμα 2 σε

Για να γενικεύσουμε την Simplex αλλάζουμε λοιπόν το βήμα 2 σε

1. $k = 1$

Για να γενικεύσουμε την Simplex αλλάζουμε λοιπόν το βήμα 2 σε

1. $k = 1$
2. Βρίσκουμε την βέλτιστη λύση uz^k του προβλήματος $B(P^k)$. Αν $uz^k \leq c_k$ πήγαινε στο βήμα 3. Αλλιώς θέσε την κολόνα προς εισαγωγή $A_s = uz^k$ και συνέχισε την Simplex

Για να γενικεύσουμε την Simplex αλλάζουμε λοιπόν το βήμα 2 σε

1. $k = 1$
2. Βρίσκουμε την βέλτιστη λύση uz^k του προβλήματος $B(P^k)$. Αν $uz^k \leq c_k$ πήγαινε στο βήμα 3. Αλλιώς θέσε την κολόνα προς εισαγωγή $A_s = uz^k$ και συνέχισε την Simplex
3. Εάν $k < p$ θέσε $k = k + 1$ αλλιώς η τρέχον βάση B βέλτιστη και εκτύπωσε "Βέλτιστη Λύση"